一、紧性相关概念及命题

Def 1.1 **列紧**：任意无限子集有聚点

Def 1.2 **紧致**：任意开覆盖有有限子覆盖.（最常用，空间紧都指紧致）

Def 1.3 **可数紧**：任意可数开覆盖有有限子覆盖（紧致的弱化版）

Fact.

以上性质是**闭遗传**的

即，对于每个闭子集 $A\subset X$，子空间拓扑下，保持以上性质

Pf：验证列紧，紧致

Prop 1.1 （有限交性质）

紧致 $\Leftrightarrow$ $\forall\{U_\alpha\}$ 开，$X\subset\bigcup_\alpha U_\alpha$，$\exists\{U_i\}_{i=1}^n\subset\{U_\alpha\}$，$X\subset\bigcup_{i=1}^n U_i$

$\Leftrightarrow$ $\forall\{F_\alpha^c\}$ F_α 闭，$X\subset\bigcup_\alpha F_\alpha^c=(\bigcap_\alpha F_\alpha)^c$，$\exists\{F_i^c\}_{i=1}^n$，$X\subset\bigcup_{i=1}^n F_i^c$

$\Leftrightarrow$ $\forall\{F_\alpha\}$，闭，$\bigcap_\alpha F_\alpha=\phi$，$\exists\{F_i\}_{i=1}^n$，$\bigcap_{i=1}^n F_i=\phi$

$\Leftrightarrow$ $\forall\{F_\alpha\}$，闭，若任意有限个的交非空，则 $\bigcap_\alpha F_\alpha\neq\phi$

Cor 1.2 紧集内一列闭子集 F_i，$\forall i, F_i\neq\phi$，$F_1\supset F_2\supset\cdots$

则 $\bigcap_{i=1}^\infty F_i\neq\phi$ （实际上是可数紧的推论，紧致的条件太强）

Prop 1.3 紧致性在连续满射下保持，即 X 满足 $\Rightarrow f(X)$ 满足

Cor 1.4 $Id:(X,\mathcal{T}_1)\to(X,\mathcal{T}_2)$ cts（i.e. $\mathcal{T}_2\subset\mathcal{T}_1$）

$(X,\mathcal{T}_1)$ cpt $\Rightarrow$ $(X,\mathcal{T}_2)$ cpt.

二、紧致与分离

Def 2.1

$(X,\mathcal{T})$ 称为 **Hausdorff 空间**（或 T2）

若 $\forall x_1,x_2\in X$，$\exists U_1,U_2\in\mathcal{T}$，$U_1\ni x_1$，$U_2\ni x_2$，$U_1\cap U_2=\phi$

Prop 2.1 T2 在连续单射的逆下保持，即 $f:X\to Y$ cts，injective

Y T2 $\Rightarrow$ X T2

Cor 2.2. $\mathcal{T}_2\supset\mathcal{T}_1$ $\Rightarrow$ $Id:(X,\mathcal{T}_2)\to(X,\mathcal{T}_1)$ cts

$(X,\mathcal{T}_1)$ T2 $\Rightarrow$ $(X,\mathcal{T}_2)$ T2

Prop 2.3 T2 空间中，紧集一定是闭集.

Cor 2.4 $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ cts，X cpt，Y T2

则 f 是闭映射，即 $\forall F\subset X$，闭 $\Rightarrow$ $f(F)\subset Y$ 闭

Cor 2.5 $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ cts，bijective，X cpt，Y T2

则 f 是同胚.

紧致实际上是说开集"很少"，而 T2 本质上是开集"充分多"

这个命题很好说明了这种性质：

Prop 2.6 $(X,\mathcal{T})$ cpt，T2 $\mathcal{T}_1\subsetneqq\mathcal{T}\subsetneqq\mathcal{T}_2$，则

$(X,\mathcal{T}_1)$ not T2，$(X,\mathcal{T}_2)$ not compact.

Pf： $Id:(X,\mathcal{T})\to(X,\mathcal{T}_1)$，连续，

若 $(X,\mathcal{T}_1)$ T2，Id 是闭映射，同胚

$Id:(X,\mathcal{T}_2)\to(X,\mathcal{T})$ 连续

若 $(X,\mathcal{T}_2)$ cpt，Id 是闭映射，同胚

三、度量空间的紧性.

Thm 3.1 开头提到的三种紧性在度量空间中等价

（亦可参见课本证明）

(1) 紧致 $\Rightarrow$ 可数紧显然

(2) 可数紧 $\Rightarrow$ 列紧

为说明无限子集有聚点，只用证明，其中的可数集有聚点

$S=\{x_1,x_2\cdots\}$，若 $S'=\phi$，则 S 闭，

$\forall x_i$，$\exists\varepsilon_i>0$，$B(x_i,\varepsilon_i)\cap S=\{x_i\}$，

$\{B(x_i,\varepsilon_i)\}$ 为 S 的可数覆盖但无有限子覆盖，矛盾！

(3) 列紧 $\Rightarrow$ 紧致.

Prop 3.2 列紧 $\Rightarrow$ Lebesgue property

$\forall$ 开覆盖 $\{U_\alpha\}$，$\exists a>0$，$\forall x\in X$，$\exists U_\alpha$，$B(x,a)\subset U_\alpha$

Pf. 否则，$\forall n>0$，$\exists x_n\in X$，s.t. $B(x_n,\frac{1}{n})\not\subset U_\alpha$，$\forall\alpha$.

$\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 有聚点 $x\in X$，$\exists x_{n_k}\to x$

设 $x\in U_\beta$，则 $\exists\varepsilon>0$，$B(x,\varepsilon)\subset U_\beta$

$\exists K$，$\forall k>K$，$d(x_{n_k},x)<\frac{\varepsilon}{2}$，且 $\frac{1}{n_k}<\frac{\varepsilon}{2}$

故 $B(x_{n_k},\frac{1}{n_k})\subset B(x,\varepsilon)\subset U_\beta$. 矛盾.

Def 3.1 （ε-net）

(X,d)，点集 $S\subset X$ 称为 ε-网，若 $\forall x\in X$，$\exists s\in S$，$d(x,s)<\varepsilon$.

Prop 3.3 列紧 $\Rightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 有限 ε-net

Pf. 若否，$\exists\varepsilon_0$，$\exists\{x_n\}_{n=1}^\infty$，s.t. $\forall n$，$d(x_{n+1},x_i)>\varepsilon_0$，$\forall i\in\{1,\cdots,n\}$

$\{x_n\}$ 有聚点 x_0，$\exists x_{n_k}\to x_0$，而 $d(x_{n_{k+1}},x_{n_k})>\varepsilon_0$，矛盾！

Lebesgue property + finite ε-net $\Rightarrow$ compact !

Thm 3.2 度量空间中，列紧 $\Leftrightarrow$ 有限 ε-net + 完备.

Pf. "$\Rightarrow$" 列紧 $\Rightarrow$ Cauchy 列收敛 $\Rightarrow$ 完备

"$\Leftarrow$" 只有证对可数集成立

$\forall n$，有限 $\frac{1}{2^n}$-net $\{x_1^n\cdots x_{k_n}^n\}$

至少有一个 $x_{i_n}^n\in B(x_{i_{n-1}}^{n-1},\frac{1}{2^{n-1}})$（已取好）

$B(x_{i_n}^n,\frac{1}{2^n})\cap B(x_{i_{n-1}}^{n-1},\frac{1}{2^{n-1}})$ 有无穷多个点

$\Rightarrow$ $x_{i_n}^n$ Cauchy 列 $\Rightarrow$ 收敛到 x_0 $\Rightarrow$ 有聚点.

Def 3.1 一致连续（非常依赖度量的一个性质）

Thm 3.3 (X,d_X) 有 Lebesgue property

$\Leftrightarrow$ $\forall(Y,d_Y)$ 以及 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 连续，

均有 f 一致连续.

Pf： "$\Rightarrow$" 显然

"$\Leftarrow$" 反证，若 (X,d_X) 无 Lobesgue property

则 $\exists$ 开覆盖 $\{U_\alpha\}$，$\exists$ 一列子集 E_n，满足

$\mathrm{diam}(E_n)\to0$，但 $\forall n$，$\forall\alpha$，$E_n\not\subset U_\alpha$

$\max\{d(x,y)\mid x,y\in E_n\}$

取 $x_n\neq y_n\in E_n$，则序列 x_n 无极限点，

否则，设 $x_0\in\{x_n\}'$，$\exists\gamma$，$B(x_0,\varepsilon)\subset U_\gamma$

$\exists n>\lceil\frac{2}{\varepsilon}\rceil$，$d(x_n,x_0)<\frac{\varepsilon}{2}$，进而 $\forall x\in E_n$

$d(x,x_0)<\varepsilon$，$E_n\subset U_\gamma$，矛盾

同理，y_n 无极限点.

$A=\{x_n\}$，$B=\{y_n\}$，$A\cap B=\phi$，A,B 闭集.

$f(x)=\dfrac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$ cts，但 $f(x_n)=0$，$f(y_n)=1$

不一致连续，矛盾.

以上证明有一处不严谨，所以我们需要如下引理：

Lemma 3.4.

(X,d_X) 不满足 L.P，则去掉有限个点后仍不满足 L.P.

只用证 $(X\setminus\{x_0\},d)$ 不满足 L.P，递推可得。

否则，$\forall\{U_\alpha\}$ cover X，$\exists\gamma$，s.t. $B(x_0,\varepsilon_0)\subset U_\gamma$

$\exists\delta<\frac{\varepsilon_0}{2}$ 为 $X\setminus\{x_0\}$ 的 L. number.

$\forall U$，$\mathrm{diam}(U)<\delta$ $\Rightarrow$ $\exists\beta$，$U\setminus\{x_0\}\subset U_\beta$

若 $x_0\notin U$，$U\subset U_\beta$

若 $x_0\in U$，则 $\forall u\in U$，$d(x,u)<\delta$ $\Rightarrow$ $u\in B(x_0,\varepsilon_0)\subset U_\gamma\Rightarrow U\subset U_\gamma$

故 δ 是 X 的 L. number，矛盾！

Cor 3.5.

(X,d_X)，紧致，$f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 连续 $\Rightarrow$ f 一致连续

4.2

(1)

$\forall y\in f(\bigcup_\lambda A_\lambda)$，$\exists x\in\bigcup_\lambda A_\lambda$，$y=f(x)$

$\exists\lambda_0$，$x\in A_{\lambda_0}$ $\Rightarrow$ $y\in f(A_{\lambda_0})$ $\Rightarrow$ $y\in\bigcup_\lambda f(A_\lambda)$

$\Rightarrow f(\bigcup A_\lambda)\subset\bigcup f(A_\lambda)$

$f(A_\lambda)\subset f(\bigcup_\lambda A_\lambda)$ $\Rightarrow$ $\bigcup_\lambda f(A_\lambda)\subset f(\bigcup_\lambda A_\lambda)$

反例 $f:1\mapsto0$，$2\mapsto0$，$A_1=\{1\}$，$A_2=\{2\}$

(2) 仅选两个作参考

$f^{-1}(\bigcap_\lambda B_\lambda)\subset f^{-1}(B_\lambda)$，$\forall\lambda$ $\Rightarrow$ $f^{-1}(\bigcap_\lambda B_\lambda)\subset\bigcap_\lambda f^{-1}(B_\lambda)$

$\forall x\in\bigcap_\lambda f^{-1}(B_\lambda)$ $\Rightarrow$ $f(x)\in B_\lambda$，$\forall\lambda$ $\Rightarrow$ $f(x)\in\bigcap_\lambda B_\lambda$

$\Rightarrow$ $x\in f^{-1}(\bigcap_\lambda B_\lambda)$ $\Rightarrow$ $\bigcap_\lambda f^{-1}(B_\lambda)\subset f^{-1}(\bigcap_\lambda B_\lambda)$

$\forall x\in f^{-1}(Y-B)$，$f(x)\in Y-B$，$f(x)\notin B$ $\Rightarrow$ $x\notin f^{-1}(B)$

$\Rightarrow$ $x\in X-f^{-1}(B)$ $\Rightarrow$ $f^{-1}(Y-B)\subset X-f^{-1}(B)$

$\forall x\in X-f^{-1}(B)$，$x\notin f^{-1}(B)$，$f(x)\notin B$，$f(x)\in Y-B$，$x\in f^{-1}(Y-B)$

$\Rightarrow$ $X-f^{-1}(B)\subset f^{-1}(Y-B)$

4.14. (1)

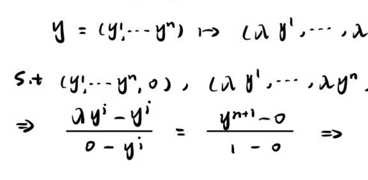
$f:S^n\to\partial A$，$x\mapsto\dfrac{x}{\|x\|_\infty}$ 连续（因每个分量连续）

$g:\partial A\to S^n$，$x\mapsto\dfrac{x}{\|x\|_2}$ 连续（因每个分量连续）

$f\circ g(x)=\dfrac{x/\|x\|_2}{\|x/\|x\|_2\|_\infty}=\dfrac{x/\|x\|_2}{\|x\|_\infty/\|x\|_2}=\dfrac{x}{\|x\|_\infty}=x$

类似，$g\circ f(x)=x$ 故同胚.

(2) 球极投影



North Pole

$f:S^n\setminus\{N\}\to\mathbb{R}^n$

$(x^1,\cdots,x^n,x^{n+1})\mapsto\lambda(x^1,\cdots,x^n)$

s.t. $(x^1,\cdots,x^n,x^{n+1})$，$(\lambda x^1,\cdots,\lambda x^n,0)$，$(0,\cdots,0,1)$ 共线

$\Rightarrow$ $\dfrac{\lambda x^i}{x^i}=\dfrac{-1}{x^{n+1}-1}$ $\Rightarrow$ $\lambda=\dfrac{1}{1-x^{n+1}}$

$f(x^1,\cdots,x^n,x^{n+1})=\dfrac{1}{1-x^{n+1}}(x^1,\cdots,x^n)$

$g:\mathbb{R}^n\to S^n\setminus\{N\}$

$y=(y^1,\cdots y^n)\mapsto(\lambda y^1,\cdots,\lambda y^n,y^{n+1})$

s.t $(y^1,\cdots y^n,0)$，$(\lambda y^1,\cdots,\lambda y^n,y^{n+1})$，$(0,\cdots,0,1)$ 共线

$\Rightarrow$ $\dfrac{\lambda y^i-y^i}{0-y^i}=\dfrac{y^{n+1}-0}{1-0}$ $\Rightarrow$ $1-\lambda=y^{n+1}$

$\Rightarrow$ $|1-\lambda|^2=1-|\lambda|^2|y|^2$ $\Rightarrow$ $\lambda^2(1+|y|^2)=2\lambda$

$\Rightarrow$ $\lambda=\dfrac{2}{1+|y|^2}$

$g(y)=\left(\dfrac{2y^1}{1+|y|^2},\cdots\dfrac{2y^n}{1+|y|^2},\dfrac{|y|^2-1}{|y|^2+1}\right)$

f,g 连续，$f\circ g(y)=y$，$g\circ f(x)=x$ $\Rightarrow$ 同胚.

4.15. B^n 指题中 V^n，是按规范的开球记号.

我们只考虑 $\varphi_p:\overline{B^n}\to\overline{B^n}$ 同胚，$\varphi_p|_{S^{n-1}}=I_{S^{n-1}}$，$\varphi_p(0)=p$

进而 $f=\varphi_q\circ\varphi_p^{-1}$

$\varphi_p(x)=(1-\|x\|_2)\cdot p+\|x\|_2\cdot\dfrac{x}{\|x\|_2}$

$=(1-\|x\|_2)p+x$

然后计算 φ_p 的逆 …… 难算，换种做法.

但由 $\overline{B^n}$ cpt，T2，知这个 φ_p 确实是同胚.

法 II.

考虑同胚 $\varphi:B^n\to\mathbb{R}^n$，$x\mapsto\dfrac{x}{1-|x|}$，$T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，$x\mapsto x+\varphi(q)-\varphi(p)$

$f\triangleq\varphi^{-1}\circ T\circ\varphi:B^n\to B^n$ 为同胚复合

$\varphi^{-1}(y)=\dfrac{y}{1+|y|}$，$f(x)=\dfrac{\frac{x}{1-|x|}+\frac{q}{1-|q|}-\frac{p}{1-|p|}}{1+\left|\frac{x}{1-|x|}+\frac{q}{1-|q|}-\frac{p}{1-|p|}\right|}$，$\forall x_0\in S^{n-1}$

$\lim_{x\to x_0}f(x)=x_0$ 故定义 $\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x), & x\in B^n\\ x, & x\in S^{n-1}\end{cases}$

则 $\tilde{f}$ 序列连续，进而连续，且 $\tilde{f}$ 双射，$\overline{B^n}$ T2 且 cpt，故 $\tilde{f}$ 同胚

4.13.

(5) $f:\mathbb{R}\to S^1$，$t\mapsto e^{2\pi it}$ 连续，在 Y 的每个纤维上

常值，故诱导连续映射 $\tilde{f}:Y\to S^1$，易验证 $\tilde{f}$ 为双射

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\
\mathbb{R}/\mathbb{Z} \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"'] & S^1
\end{tikzcd}$$

$\forall U\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，开，则 $p^{-1}(U)$ 开，可写为若干

长度小于 1 开区间 I_λ 的并

$\forall$ 开区间 $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$，$\varepsilon<\frac{1}{2}$，$f((x-\varepsilon,x+\varepsilon))$ 开

$\tilde{f}(U)=f(p^{-1}(U))=f(\bigcup I_\lambda)=\bigcup f(I_\lambda)$ 开

故 $\tilde{f}$ 同胚

(6) 证明方式与 (5) 完全一样

Rmk：虽然这里 $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n\simeq\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$，但对一般拓扑群

这个结论并不成立，这门课不要求掌握

考试千万别直接认为这两空间同胚！！！